

Chapitre XII

ROTATION AUTOUR D'UN AXE DE DIRECTION FIXE.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

XII-1 Référentiel barycentrique.

Soit un système, solide ou non, repéré dans un référentiel galiléen $Oxyz$ et de centre de gravité G . On appelle *référentiel barycentrique* de ce système le référentiel (*a priori* non galiléen) $Gxyz$, centré en G et dont les axes sont parallèles à ceux de $Oxyz$. Ce référentiel est en translation (*a priori* non uniforme); la vitesse d'entraînement est donc la même en tout point, c'est la vitesse \vec{v}_G du point G dans le référentiel «du laboratoire» et son vecteur rotation par rapport à $Oxyz$ est nul.

Pour tout point A_i du système, on note \vec{v}_i sa vitesse absolue (par rapport à $Oxyz$) et \vec{v}_i^* sa vitesse relative (par rapport à $Gxyz$); la loi de composition des vitesses nous apprend que :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$$

Remarque : Dans le cas d'un solide où les vitesses \vec{v}_i et \vec{v}_j des points A_i et A_j sont liés par :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \overrightarrow{A_i A_j} \wedge \vec{\omega}$$

on tire, en soustrayant \vec{v}_G des deux côtés :

$$\vec{v}_i^* = \vec{v}_j^* + \overrightarrow{A_i A_j} \wedge \vec{\omega}$$

ce qui montre que le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est le même dans le référentiel du laboratoire et dans le référentiel barycentrique, remarque qu'on ne perdra pas de vue car $\vec{\omega}$ est souvent plus aisé à déterminer dans le référentiel barycentrique.

Attention aussi à ne pas croire qu'on va exprimer les théorèmes de la mécanique dans le référentiel non galiléen barycentrique; la suite montre qu'il

ne sert que d'auxiliaire de calcul pour calculer le moment cinétique et l'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire.

Par contre le théorème de la résultante dynamique (théorème du centre de gravité) est si simple tel qu'on le connaît qu'on continuera toujours à l'utiliser sous cette forme simple.

Remarquons toutefois que le calcul qui a conduit dans le référentiel du laboratoire à $\vec{p} = M \vec{v}_G$ conduit à une quantité de mouvement dans le référentiel barycentrique $\vec{p}^* = M \vec{v}_G^*$, or \vec{v}_G^* est bien sûr nulle, d'où $\vec{p}^* = \vec{0}$

XII-2 Théorème du moment cinétique.

XII-2.a Théorème de König.

Le programme indique que le résultat de la démonstration pour deux points, vue en PCSI est généralisée. Pour les curieux, indiquons la démonstration générale pour un système, solide ou non :

$$\vec{\sigma}(O) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_G$$

On reconnaît dans le premier terme le moment cinétique calculé dans le référentiel barycentrique, qu'on note provisoirement $\vec{\sigma}^*(O)$; pour le second, on a :

$$\begin{aligned} \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_G &= \sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{v}_G = \\ &= \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} \right) \wedge \vec{v}_G = M \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_G = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G \end{aligned}$$

Formellement c'est le moment cinétique qu'*aurait* un point matériel concentrant toute la masse du système en G . D'autre part, la formule de changement de point pour le moment cinétique, appliquée dans le référentiel barycentrique donne :

$$\vec{\sigma}^*(O) = \vec{\sigma}^*(M) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}^* = \vec{\sigma}^*(M)$$

car \vec{p}^* est nul (cf paragraphe XII-1); on en déduit que $\vec{\sigma}^*$ ne dépend pas du point de calcul et on ne le mentionne donc plus.

Retenons donc :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{\sigma}^*}$$

XII-2.b Théorème du moment cinétique au centre de gravité.

Le théorème du centre de gravité est valable en un point fixe (disons O) et l'on y a :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O) = \vec{\mathfrak{M}}_{tot,ext}(O)$$

Reportons-y les formules de changement de points entre O et G :

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{\sigma}(G) + \vec{OG} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}(O) = \vec{\mathfrak{M}}(G) + \vec{OG} \wedge \vec{F}$$

on en déduit :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G) + \frac{d}{dt} \vec{OG} \wedge \vec{p} + \vec{OG} \wedge \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G) + \vec{v}_G \wedge \vec{p} + \vec{OG} \wedge \vec{F} = \vec{\mathfrak{M}}(G) + \vec{OG} \wedge \vec{F}$$

où les termes $\vec{OG} \wedge \vec{F}$ se simplifient et $\vec{v}_G \wedge \vec{p}$ est nul car ces vecteurs sont parallèles ($\vec{p} = M \vec{v}_G$) donc :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G) = \vec{\mathfrak{M}}(G)$$

Ce qui prouve que le théorème du moment cinétique est valable en G , bien que ce point ne soit pas fixe.

Remarquons de plus que si l'on prend $O = G$ dans la formule de KÖNIG (avec $\vec{OG} = \vec{0}$), on a : $\vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*$. Retenons donc :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}^* = \vec{\mathfrak{M}}(G)}$$

XII-2.c Application à un solide en rotation autour d'un axe de direction fixe.

Il s'agit par exemple d'une roue de bicyclette qui va en ligne droite. Dans le référentiel barycentrique G est sur l'axe puisque sa vitesse est nulle ; on décrira donc le mouvement comme la combinaison d'une rotation autour d'un axe Gz et d'une translation de G .

Le calcul de $\vec{\sigma}^*$ est simple en projection sur l'axe, on a comme au chapitre ??, $\sigma_z^* = J_{Gz} \omega$ et il est dès lors naturel d'utiliser le théorème du moment en G et de le projeter sur Gz ; on tire tout simplement :

$$\boxed{J_{Gz} \frac{d}{dt} \omega = \mathfrak{M}_{ext_{Gz}}}$$

Et c'est cela et cela seul qu'il importe de retenir pour gérer correctement un exercice ou un problème.

Remarque : En mécanique du point, pour résoudre un problème, on utilise le théorème du centre de gravité OU celui du moment cinétique. En mécanique du solide, en général, on doit utiliser LES DEUX. Quant au théorème de l'énergie cinétique, on peut certes toujours s'en passer, mais souvent au prix de beaucoup plus de calculs ; dans la pratique, on pensera donc toujours d'abord à lui.

XII-3 Théorème de l'énergie cinétique.

XII-3.a Théorème de Kőnig (bis).

Le programme indique que le résultat de la démonstration pour deux points, vue en PCSI est généralisée. Pour les curieux, indiquons la démonstration générale pour un système, solide ou non :

$$\begin{aligned}
 E_{cin} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G)^2 = \\
 &\qquad \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} + \sum_i m_i \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \\
 E_{cin} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i^* \right) \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_G^2 \\
 E_{cin} &= E_{cin}^* + \vec{p}^* \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 = E_{cin}^* + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2
 \end{aligned}$$

où \vec{p}^* est nul (cf paragraphe XII-1) et E_{cin}^* est l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique. $\frac{1}{2} M \vec{v}_G^2$ est formellement l'énergie cinétique qu'*aurait* un point matériel concentrant toute la masse du système en G .

Retenons donc :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + E_{cin}^*$$

XII-3.b Application à un solide en rotation autour d'un axe de direction fixe.

Dans le contexte du paragraphe XII-2.b, on a comme au chapitre ??, $E_{cin}^* = (1/2) J_{Gz} \omega^2$ et nous retiendrons :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \omega^2$$

qu'on reportera dans le théorème de l'énergie cinétique.

XII-4 Lois de Coulomb.

XII-4.a Contact ponctuel entre solides.

Soit un solide \mathcal{S} en contact en un point I avec un support \mathcal{S}_0 immobile . Grâce à la formule de changement de point, on connaît la vitesse de tous les points du solide si l'on connaît le vecteur rotation et la vitesse en un point particulier. Un point particulier intéressant est, bien sûr, le barycentre car

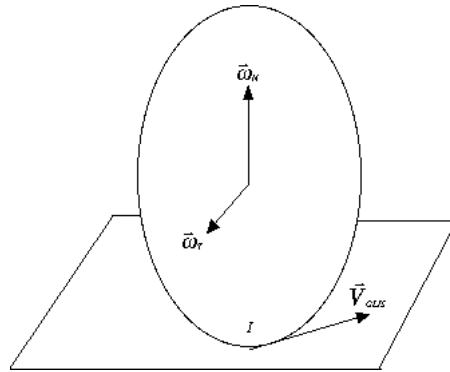
il joue un rôle privilégié dans les théorèmes de la dynamique. Un autre est désormais le point de contact I .

Dans la mesure où l'on s'intéresse à un contact qui perdure, la vitesse du point du solide en contact avec le support lui est tangentielle, on l'appelle vitesse de glissement et on la note $\vec{v}_{glis.}$ ou $\vec{v}_{I \in S}$

Selon que cette vitesse est non nulle ou nulle, on dit qu'il y a glissement ou non.

Bien sûr, si le support S_0 est lui-même mobile (tapis roulant par exemple), la vitesse de glissement est définie comme une vitesse relative, soit $\vec{v}_{glis.} = \vec{v}_{I \in S} - \vec{v}_{I \in S_0}$

De même, on décompose le vecteur rotation en une composante normale $\vec{\omega}_N$ qui décrit un mouvement de *pivotement* et une composante tangentielle $\vec{\omega}_T$ qui décrit un mouvement de *roulement*. Dans ce cours, on n'explorera pas les mouvements avec pivotement et l'on se penchera sur les mouvements de roulement avec ou sans glissement.

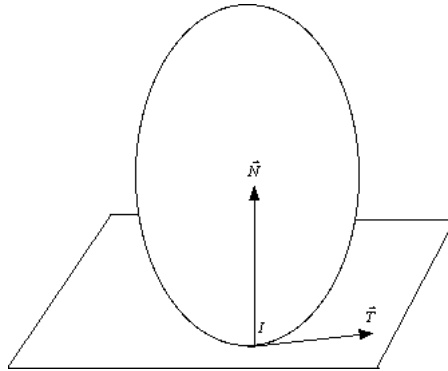


Attention, une source d'erreurs graves consiste à croire que la dérivée par rapport au temps de la vitesse de glissement est l'accélération du point de contact ; c'est faux car le point de contact à l'instant t et le point de contact à $t + dt$ sont deux points différents du solide. La façon la plus simple de ne pas tomber dans ce piège est de considérer comme un **tabou absolu** la dérivation temporelle de la vitesse de glissement.

XII-4.b Lois du frottement.

Il s'agit d'établir la loi de force entre le support et le solide. Le mécanisme élémentaire est encore mal précisé, car il relève de forces à court rayon d'action entre matériaux électriquement neutres à l'échelle microscopique, c'est-à-dire des forces de VAN DER WAALS. Ces forces sont très sensibles à l'état de surface des deux corps (rugueux ou lisses et à quelle échelle?) et à la présence d'impuretés (poussières) ou de fluides (eau, gras) et elles ne sont reproductibles expérimentalement qu'avec de larges fluctuations (plusieurs pour-cent). Nous adopterons le modèle suivant, connu sous le nom de lois de COULOMB dont il ne faut pas espérer plus qu'un ordre de grandeur dans les prédictions quantitatives. Le support exerce sur le solide une force unique appliquée au point de contact I ; on la décompose en une composante normale \vec{N} et une

composante tangentielle \vec{T} .



C'est une source d'erreurs graves dans l'apprentissage de cette mécanique de croire que les lois de Coulomb explicitent ces composantes ; elles restent des inconnues du mouvement et même pire, elles ne sont pas forcément constantes, ce sont des fonctions du temps inconnues dans le problème traité. Il importe de bien avoir cette affirmation présente à l'esprit.

Les lois de COULOMB précisent les points suivants :

- pour la composante normale \vec{N} : celle-ci est toujours dirigée du support vers le solide. Si l'hypothèse du contact qui perdure conduit à un résultat dans l'autre sens c'est qu'il y a rupture du contact et le solide *décolle*.
- pour la composante tangentielle \vec{T} dans le cas du non-glissement
 - sa direction et son sens sont inconnus.
 - son module $\|\vec{T}\|$ est au plus égal à $f\|\vec{N}\|$ où f , appelé *coefficient de frottement*, est une constante qui dépend de la nature des matériaux de support et du solide ainsi que de leur état de surface¹. Si l'hypothèse du non-glissement conduit à un résultat qui dépasse cette limite c'est que le solide glisse.
- pour la composante tangentielle \vec{T} dans le cas du glissement
 - sa direction est celle de la vitesse de glissement et son sens opposé.
 - son module est égal à $f\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement².

Retenons :

Non-glissement : $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$, direction et sens inconnus.
 Glissement : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, même direction que $\vec{v}_{glis.}$ et sens opposé.

XII-4.c Puissance des forces de contact.

La définition générale de la puissance s'applique, on a donc :

$$\mathcal{P} = (\vec{N} + \vec{T}) \cdot \vec{v}_{I \in S} = \vec{T} \cdot \vec{v}_{glis.}$$

car \vec{N} est normale et $\vec{v}_{glis.}$ tangentielle.

¹Ainsi il existe un coefficient "métal sur bois lisse sec" et un coefficient "caoutchouc mouillé sur bois rugueux gras".

²Les puristes distinguent un coefficient statique f_S dans le cas du non-glissement et un coefficient dynamique f_D dans le cas du glissement avec $f_D < f_S$ mais, vu le peu de reproductibilité des expériences, c'est ennuyer les diptères pour bien peu.

En particulier dans le cas du non-glisement, $\vec{v}_{glis.}$ est nulle et donc \mathcal{P} aussi ; il faut insister là-dessus car le point de contact se déplace et l'on a un travail nul avec un déplacement non-nul. L'apparent paradoxe se résout en remarquant que le point de contact n'est pas un point matériel fixe (même explication qu'à la fin du paragraphe XII-4.a). Pour éviter cette erreur grave, on considérera comme un **tabou absolu** de parler de travail. Retenons :

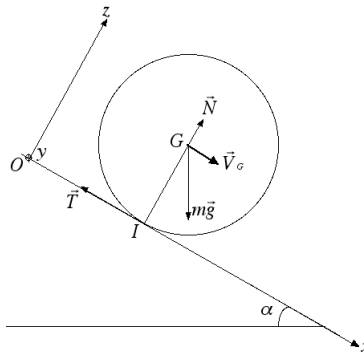
Les forces de contact ont une puissance nulle en cas de non-glisement.

XII-4.d Exemple d'une sphère sur un plan incliné.

Reste à voir comment tout cela s'articule dans la résolution d'un problème. Rien de tel pour cela que d'en résoudre un. Etudions donc le cas d'une sphère de masse M de rayon R posée sans vitesse initiale (ni en translation, ni en rotation) sur un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizontale.

Paramétrage et bilan des forces.

Par symétrie le mouvement se fera selon la ligne de plus grande pente choisie comme axe Ox , la normale est choisie comme axe Oz . Tous les vecteurs seront donc dans le plan de symétrie, sauf le vecteur rotation qui jouit des mêmes règles de symétrie que le champ magnétique (on dit parfois qu'il s'agit d'un *pseudo-vecteur* ou encore d'un *vecteur axial*). Il est donc normal à ce plan et on note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$. Le centre de gravité a une abscisse $x(t)$ et une cote constante R , sa vitesse est donc $\vec{v}_G = \dot{x} \vec{e}_x$. En G s'exerce le poids $M \vec{g} = Mg (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$ et en I la force de contact. On sait que la composante normale pointe vers le haut, avec un peu d'expérience, on sent la composante tangentielle vers l'arrière sans en être tout à fait sûr. Comment gérer cette incertitude ? Simplement en notant la force de contact $N \vec{e}_z - T \vec{e}_x$ avec T algébrique (si T est positif, la force est vers l'arrière, sinon vers l'avant).



Résolution dans l'hypothèse du non-glisement.

Un premier point essentiel est que cette hypothèse lie les vitesses de translation et de rotation ; en effet appliquons la formule de changement de point pour les vitesses de G et de I :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{GI} \wedge \vec{\omega}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} \vec{e}_x &= \vec{0} + (-R \vec{e}_z) \wedge \omega \vec{e}_y \\ \dot{x} \vec{e}_x &= R \omega \vec{e}_x\end{aligned}$$

d'où en projection :

$$\dot{x} = R \omega$$

Un deuxième point est que les deux degrés de liberté (translation selon Ox et rotation selon Oy) sont liés, donc il n'y a qu'une inconnue scalaire et dès lors le théorème le plus économique est le théorème de l'énergie cinétique. On calcule celle-ci avec la formule de KÖNIG et on utilise la donnée du moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre ($J = (2/5) M R^2$) :

$$\begin{aligned}E_{cin} &= \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + E_{cin}^* = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\ E_{cin} &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M R^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) M \dot{x}^2 = \frac{7}{10} M \dot{x}^2\end{aligned}$$

La puissance des forces de contact est nulle puisqu'il n'y a pas glissement et celle du poids est :

$$\mathcal{P} = M \vec{g} \cdot \vec{v}_G = M g (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) \cdot \dot{x} \vec{e}_x = M g \sin \alpha \dot{x}$$

Le théorème donne :

$$\begin{aligned}\frac{dE_{cin}}{dt} &= \mathcal{P} \\ \frac{7}{5} M \dot{x} \ddot{x} &= M g \sin \alpha \dot{x}\end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

On reconnaît un mouvement uniformément accéléré, le calcul de $x(t)$ est de routine.

Vérification de l'hypothèse de non-glissement.

C'est une étape ultime qu'il ne faut surtout pas oublier. Il s'agit de vérifier (cf paragraphe XII-4.b) que $|T| \leq f |N|$ où f est un coefficient supposé connu. Il s'agit donc de calculer N et T , on peut utiliser le théorème du centre de gravité :

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = M \ddot{x} \vec{e}_x = M \vec{g} + N \vec{e}_z - T \vec{e}_x$$

soit en projection sur Ox et Oz :

$$M \ddot{x} = M g \sin \alpha - T \quad \text{et} \quad 0 = -M g \cos \alpha + N$$

soit en reportant $\ddot{x} = (5/7) g \sin \alpha$:

$$N = M g \cos \alpha \quad \text{et} \quad T = \frac{2}{7} M g \sin \alpha$$

et la condition $|T| \leq f |N|$ mène à :

$$\tan \alpha \leq \frac{7}{2} f$$

Remarque : On aurait pu aussi utiliser le théorème du moment cinétique en G projeté sur Gz , on a :

$$\sigma_{Gz}^* = J \omega = \frac{2}{5} M R^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right) = \frac{2}{5} M R \dot{x}$$

Le moment du poids en G est nul car appliqué en G , le moment de \vec{N} aussi car ce vecteur appliqué en I est parallèle à \vec{GI} , ne reste que le moment de \vec{T} , soit :

$$\mathfrak{M}_{Gz} = (\vec{GI} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_y = [(-R \vec{e}_z) \wedge (-T \vec{e}_x)] \cdot \vec{e}_y = RT \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = RT$$

et le théorème du moment cinétique en G donne donc :

$$\frac{d\sigma_{Gz}^*}{dt} = \mathfrak{M}_{Gz}$$

$$\frac{2}{5} M R \ddot{x} = RT$$

$$T = \frac{2}{5} M \ddot{x} = \frac{2}{5} M \frac{5}{7} g \sin \alpha = \frac{2}{7} M g \sin \alpha$$

On retrouve le même résultat, bien sûr, mais un peu plus vite.

Résolution dans l'hypothèse du glissement.

Curieusement c'est plus simple. Il n'y a plus de couplage entre rotation et translation mais par contre il y a couplage entre N et T . Bien sûr, la sphère va glisser vers le bas donc \vec{T} est vers l'arrière, donc avec nos notations, les lois du frottement dans le cas du glissement donnent (cf paragraphe XII-4.b) $T = f N$.

Le théorème du centre de gravité, projeté sur les axes donne exactement comme plus haut :

$$M \ddot{x} = M g \sin \alpha - T \quad \text{et} \quad 0 = -M g \cos \alpha + N$$

mais ici, on en tire successivement :

$$N = M g \cos \alpha$$

$$T = f N = f M g \cos \alpha$$

$$M \ddot{x} = M g \sin \alpha - T = M g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

d'où, après simplification et intégration (avec l'hypothèse de vitesse nulle en $t = 0$) :

$$\ddot{x} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\dot{x} = g t (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

De même le théorème du moment cinétique sur Gz donne ici :

$$J_{Gz} \dot{\omega} = \frac{2}{5} M R^2 \dot{\omega} = R T = R f M g \cos \alpha$$

$$\dot{\omega} = \frac{5}{2} \frac{f g \cos \alpha}{R}$$

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{f g t \cos \alpha}{R}$$

Reste à vérifier l'hypothèse de travail, à savoir le glissement vers l'avant. A cet effet calculons la vitesse du point I de la sphère :

$$\vec{v}_I = \vec{v}_G + \vec{IG} \wedge \vec{\omega} = \dot{x} \vec{e}_x + R \vec{e}_z \wedge \omega \vec{e}_y = (\dot{x} - R\omega) \vec{e}_x$$

soit, en reportant les résultats ci-dessus :

$$\vec{v}_I = \left(\sin \alpha - \frac{7}{2} f \cos \alpha \right) g t \vec{e}_x$$

et v_I n'est vers l'avant (pour $t > 0$ bien sûr) que si $\tan \alpha > \frac{7}{2} f$, condition qui est l'opposée de la condition de non-glissement.

XII-5 Indications sur les solides articulés.

Un bon exercice vaudra mieux ici qu'un cours. On se contente de quelques indications :

- Un ensemble de solides articulés *n'est pas* un solide ; on ne peut pas lui appliquer ce qui ne vaut que pour un solide (on veut surtout parler de l'existence du moment d'inertie pour un solide).
- La quantité de mouvement, le moment cinétique, l'énergie cinétique du système se calculent par addition. Les moments cinétiques ne peuvent s'ajouter que calculés au même point. On peut toutefois les calculer en des points différents puis utiliser pour chacun la formule de changement de point pour se ramener à un point unique.
- On pourra *ad libitum* appliquer les lois valables pour un système à l'un des solides, au système entier, à un système partiel composé d'une partie des solides.
- Il faudra modéliser, au niveau des liaisons entre solides, leur interaction, **sans oublier que s'il y a action d'un solide sur un autre, il y a aussi réaction**. Vis à vis du système, il s'agit de forces intérieures (attention, leur puissance n'est pas nulle, *a priori*).
- Si les contacts du système avec son support se font sans glissement et si les liaisons internes sont parfaites, il est judicieux d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système entier.